PULSATII PROPRII LA O BARA TIMOSHENKO

INCASTRATA LA UN CAPAT SI

ARTICULATA LA CELALALT CAPAT

1. INTRODUCERE

Ecuatia vibratiilor de incovoiere ale unei bare elastice data de ecuatia Bernoulli-Euler nu este intotdeauna potrivita pentru modurile inalte de vibratie. In cele ce urmeaza vom considera ecuatia vibratiilor de incovoiere unei bare finite si uniforme in care vom tine seama de efectele fortelor taietoare, a inertiei de rotatie (bara Timoshenko) dar si de prezenta unei forte compresive axiale de marime constanta.

Efectul inertiei de rotatie si a deformatiei de forfecare a fost studiat de Timoshenko. Mindlin a folosit cele doua efecte suplimentare si in studiul vibratiilor placilor. Anderson si Dolph au dat solutiile generale si o analiza completa pentru bara uniforma articulata la ambele capete. Kruszewski a obtinut ecuatia frecventelor pentru bara in consola folosind conditii la limita neomogene, dar calculele sunt foarte complicate. K. Sato studiaza ecuatiile de miscare cu ajutorul principiului lui Hamilton. Leissa si Sonalla includ in studiul lor diferite conditii initiale in studiul vibratiilor barelor in consola. Abramovich studiaza cele doua efecte pentru bare composite.

2. ECUATII DE MISCARE, CONDITII LA LIMITA, SOLUTIA

Consideram vibratiile unei bare Timoshenko sub actiunea unei forte axiale constanta.

Ecuatiile de miscare sunt:

$$\frac{\partial T}{\partial x} - \rho A \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} = T - \rho I \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} + P \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

$$M = -EI \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} \quad (3)$$

$$T = kAG \left[\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} - \psi(x,t)\right] \quad (4)$$

in care $y(x,t)$ reprezinta abaterea transversala, $\psi(x,t)$ unghiul de incovoiere, *T(x,t)* forta transversala de forfecare, *M(x,t)* momentul de incovoiere, *E* modulul de elasticitate, *G* modulul de rigiditate, *I* momentul de inertie geometric al ariei sectiunii, *A* aria sectiunii transversale, ρ densitatea de lungime, P este forta de compresiune axiala constanta iar k un factor numeric de forma al sectiunii transversale.

Eliminand parametrii M si T intre ecuatiile (1), (2), (3) si (4) obtinem:

$$-EI\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} = kAG\left[\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} - \psi(x,t)\right] - \rho I\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial t^2} + P\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} = 0 \quad (5)$$

$$kAG\left[\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}\right] - \rho A\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (6)$$

Folosind notatiile:

$$\frac{\rho}{kG} = a^2; \quad \frac{\rho}{E} = b^2; \quad \frac{P}{EI} = c^2; \quad \frac{I}{A} = r^2; \quad \frac{\partial}{\partial x} = l; \quad \frac{\partial}{\partial t} =. \quad (7)$$

ecuatiile (5) si (6) devin:

$$a^2\psi'' + \frac{b^2}{r^2}(y' - \psi) - a^2b^2\psi + a^2c^2y' = 0 \quad (8)$$

$$y'' - \psi' - a^2\ddot{y} = 0 \quad (9)$$

Prin eliminarea functiilor ψ si y intre ecuatiile (8) si (9) suntem condusi la urmatoarele doua ecuatii diferentiale in y si ψ:

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - (a^2 + b^2)\frac{\partial^4 y}{\partial x^2\partial t^2} + \frac{b^2}{r^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + c^2\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + a^2b^2\frac{\partial^4 y}{\partial t^4} = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} - (a^2 + b^2)\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2\partial t^2} + \frac{b^2}{r^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + c^2\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + a^2b^2\frac{\partial^4 \psi}{\partial t^4} = 0 \quad (11)$$

Pentru determinarea modurilor de vibratii in cazul barei incastrata la un capat si articulata la celalalt capat se impun conditiile la limita urmatoare:

$$y(0,t) = \psi(0,t) = y'(L,t) = \psi'(L,t) = 0 \quad (12)$$

unde L este lungimea barei.

Solutiile ecuatiilor (10) si (11) le determinam prin metoda separarii variabilelor, deci:

$$y(x,t) = X_1(x)T(t), \quad \psi(x,t) = X_2(x)T(t) \quad (13)$$

Folosind notatiile:

$$2q^2 = \left[(p^2(a^2 + b^2) + c^2)^2 - 4a^2b^2p^4 + 4\frac{b^2}{r^2}p^2\right]^{1/2} + p^2(a^2 + b^2) + c^2 \quad (14)$$

$$2s^2 = \left[(p^2(a^2 + b^2) + c^2)^2 - 4a^2b^2p^4 + 4\frac{b^2}{r^2}p^2\right]^{1/2} - p^2(a^2 + b^2) - c^2 \quad (15)$$

$$\ddot{T}(t) + p^2 T(t) = 0, \quad par < 1 \tag{16}$$

modurile proprii X_1 si X_2 au forma:

$$X_1(x) = C_1 \cos qx + C_2 \sin qx + C_3 \cosh sx + C_4 \sinh sx \tag{17}$$

$$X_2(x) = \frac{a^2p^2 - q^2}{q}(C_1 \sin qx - C_2 \cos qx) + \frac{a^2p^2 + s^2}{s}(C_3 \sinh sx + C_4 \cosh sx) \tag{18}$$

Conditiile la limita (12) conduc la relatiile:

$$X_1(0) = X_2(0) = X_1(L) = X_2'(L) = 0 \tag{19}$$

Ecuatia pulsatiilor proprii se obtine din conditiile (19) cu ajutorul relatiilor (17) si (18):

$$q(a^2p^2 + s^2)\mathrm{tg}\, qL + s(a^2p^2 - q^2)\mathrm{tgh}\, sL = 0 \tag{20}$$

Pentru fiecare pulsatie $p_i, \quad i = 1,2,3, \ldots$ se obtin modurile proprii X_{1i} si X_{2i}. Folosind notatiile:

$$\propto = \frac{s(a^2p^2 - q^2)}{q(a^2p^2 + s^2)}; \quad \beta = \frac{\cosh sL - \cos qL}{\sin qL + \propto \sinh sL} \tag{21}$$

si omitand indicele *i* pentru X_1, X_2, *q*, *s* si *p*, modurile proprii sunt de forma (K constanta):

$$X_1(x) = K(\cos qx + \beta \sin qx - \cosh sx + \propto \beta \sinh sx) \tag{22}$$

$$X_1(x) = \frac{a^2p^2 - q^2}{q} K(\sin qx - \beta \cos qx - \frac{1}{\propto} \sinh sx + \beta \cosh sx) \tag{23}$$

3. EXEMPLU NUMERIC

Prin exemplul urmator vom arata ca efectele fortelor de inertie de rotatie si a fortelor taietoare nu se pot neglija nu numai pentru moduri inalte, dar si pentru moduri inferioare. Pentru a justifica acest lucru, consideram o bara dreapta omogena de sectiune ,l' cu urmatoarele caracteristici: $\mathrm{E} = 2{,}1 \cdot 10^7 [\mathrm{N/cm^2}]$; G=3E/8; $\rho = 7{,}8 \cdot 10^{-3} [\mathrm{Kg/cm^3}]$; k=1/4,4.

In tabelele 1-8 sunt date primele patru pulsatii in cazul barei Bernoulli-Euler (B-E) cand se neglijeza fortele taietoare si inertia de rotatie, pentru diferite valori ale lungimii *L* si a patratului razei de giratie r^2 in comparatie cu bara Timoshenko (T).

r^2 \ L	100	200	300
125/4	221,049	46,964	13,210
125/6	179,853	38,345	10,786
125/8	155,891	33,208	9,340

Tabelul 1- Pulsatia p_1 pentru bara B-E

r^2 \ L	100	200	300
125/4	208,084	46,398	13,138
125/6	172,294	38,036	10,747
125/8	150,235	33,006	9,315

Tabelul 2- Pulsatia p_1 pentru bara

T

r^2 \ L	100	200	300
125/4	1420,933	349,979	151,569
125/6	1160,187	285,757	123,756
125/8	1004,751	247,473	107,175

Tabelul 3- Pulsatia p_2 pentru bara B-E

r^2 \ L	100	200	300
125/4	997,327	311,988	143,554
125/6	893,035	263,929	119,277
125/8	815,971	232,887	104,227

Tabelul 4- Pulsatia p_2 pentru bara T

r^2 \ L	100	200	300
125/4	2047,251	504,789	219,049
125/6	1671,574	412,159	178,853
125/8	1447,625	356,940	154,891

Tabelul 5- Pulsatia p_3 pentru bara B-E

r^2 \ L	100	200	300
125/4	1503,777	457,368	209,084
125/6	1332,672	385,018	173,294
125/8	1209,701	338,840	151,235

Tabelul 6- Pulsatia p_3 pentru bara T

r^2 \ L	100	200	300
125/4	4619,001	1148,882	506,120
125/6	3771,99	938,009	413,246
125/8	3266,293	812,339	357,881

Tabelul 7- Pulsatia p_4 pentru bara B-E

r^2 \ L	100	200	300
125/4	2435,910	887,815	443,465
125/6	2271,992	778,441	376,900
125/8	2140,673	701,775	333,464

Tabelul 8- Pulsatia p_4 pentru bara T